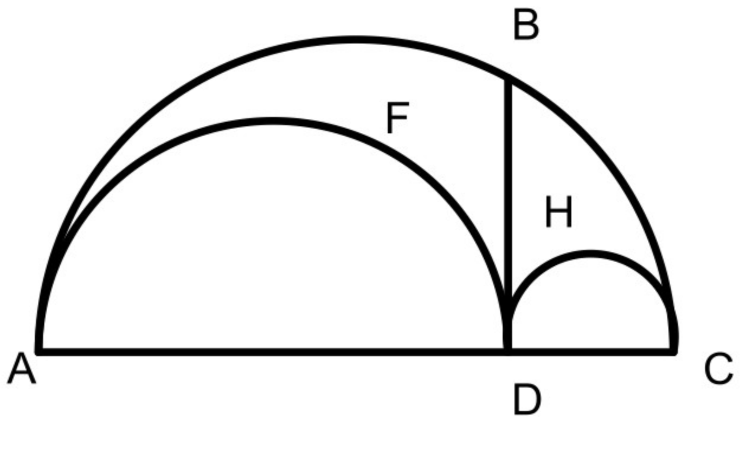
ÁREA DEL CUCHILLO DE ZAPATERO

Sea ABC un semicírculo. Por el punto B se traza una perpendicular BD al diámetro AC y sobre los segmentos AD y DC como diámetros se construyen dos semicírculos AFD y DHC. El área AFDHCB de las dos hoces obtenidas (Arquímedes lo llama *arbelon*, de *árbelos*, que es como se llama en griego al cuchillo del zapatero) es igual al área del círculo de diámetro DB. Demuéstralo



Recordamos aquí que el *arco capaz* de 90º es una semicircunferencia (es decir, si desde cualquier punto de una semicircunferencia se trazan segmentos a los extremos del diámetro, éstos forman un ángulo recto).

El área del *arbelon* será la del semicírculo ABC menos las de los semicírculos AFD y DHC:

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2$$

$$A_{AFD}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2$$

$$A_{DHC}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{DC}{2}\right)^2$$

$$A_{arbelon}=\frac{\pi}{8}\left(AC^2-AD^2-DC^2\right)$$

Se nos pide demostrar que esta área es igual a $\pi\left(\frac{DB}{2}\right)^2$, es decir:

$$\frac{\pi}{8}\left(AC^2-AD^2-DC^2\right)=\frac{\pi}{4}DB^2 \quad es\ decir$$

$$AC^2-AD^2-DC^2=2\,DB^2$$

ABC es un triángulo rectángulo (recto en B) así que: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ABD es un triángulo rectángulo (recto en D) así que: $AB^2 = DB^2 + AD^2$

BDC es un triángulo rectángulo (recto en D) así que: $BC^2 = DB^2 + DC^2$

De forma que: $AC^2 = DB^2 + AD^2 + DB^2 + DC^2$

$AC^2 - AD^2 - DC^2 = 2\ DB^2$

Quod erat demostrandum